مسئله بهینه سازی غیر خطی با قیود خطی

مسئله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} \min \ f(x) \\ s.t \ \ Ax = b \end{cases}$$

که در آن A یک ماتریس $m \times n$ و f تابعی دوبار مشتق پذیر پیوسته است. همچنین فرض کنیم $Ax = b$ رتبه سطری کامل است.

یکی از روشهای حل این دسته از مسائل تبدیل ان به مساله نامقید و استفاده از الگوریتم های بهینه سازی نامقید است.

مثال زیر را در نظر بگیرید

$$\min \ f(x) = x_1^{\ 2} - 2x_1 + x_2^{\ 2} - x_3^{\ 2} + 4x_3$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$$

همانطور که می بینید به راحتی می توان x_1 را برحسب بقیه متغییرها بدست آورد. $x_1 = 2 + x_2 - 2x_3$ پس مساله را می توان بصورت مساله نامقید زیر نوشت:

$$\min 2x_2^{\ 2} + 3x_3^{\ 2} - 4x_2x_3 + 2x_2$$
$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_2 - 4x_3 + 2 \\ 6x_3 - 4x_2 \end{pmatrix}, H(x) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

چون هسیان معین مثبت است پس تابع محدب است. پس مینیمم مساله نامقید در ریشه گرادیان آن اتفاق می افتد، یعنی $x_2 = -1.5, x_3 = -1$. بنابراین $x_1 = 2.5$.

هر مساله بهینه سازی غیر خطی با قیود $Ax = b$ را می توان به یک مساله معادل نامقید تبدیل کرد. برای این منظورفرض میکنیم $\bar{x}$ یک نقطه مسئله شدنی باشد یعنی $A\bar{x} = b$. آنگاه هر نقطه شدنی دیگر را می توان بصورت $x = \bar{x} + p$ نوشت که دران p متعلق به فضای پوچ A است.

*چون رتبه A سطری کامل فرض شده است اگر $m=n$ آنگاه مسأله جواب منحصر بفرد $x=A^{-1}b$ را دارد. حال اگر $m<n$ انگاه فضای پوچ ماتریس A ، غیرتهی است. فرض کنیم بعد فضای بوچ برابر r, $Z_{n\times r}$ نیز یک پایه برای فضای پوچ باشد. بنابراین می توان ناحیه شدنی را بصورت زیر نوشت:

$$\{x \mid x=\bar{x}+Zv, v\in R^r\}$$

حال با این تغییر متغییر مساله مینیمم سازی $\begin{cases}\min f(x)\\ Ax=b\end{cases}$ را می توان بصورت نوشت:

$$\min \phi(v)= f(\bar{x}+Zv)$$

مثال 1: مساله قبل را در نظر بگیرید که در آن $Z=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ یک پایه برای فضای پوچ ماتریس $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ است. حال به کمک نقطه شدنی $\bar{x}=(2,0,0)^T$ هر نقطه شدنی را می توان بصورت زیر نوشت:

$$x=\bar{x}+Zv=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}v$$

که در آن $v=(v_1,v_2)^T$. با جایگذاری x در f خواهیم داشت:

$$\phi(v)=2v_1^{\,2}+3v_2^{\,2}-4v_1v_2+2v_1$$

که همان تابع مساله نامقید است که در مثال قبل بررسی شد.

شرایط بهینگی:

با استفاده از مشتق گیری زنجیری داریم:

$$\nabla\phi(v)=Z^T\nabla f(\bar{x}+Zv)=Z^T\nabla f(x), \nabla^2\phi(v)=Z^T\nabla^2 f(\bar{x}+Zv)Z=Z^T\nabla^2 f(x)Z$$

که آنها را گرادیان و هسیان کاهش یافته گویند. اگر x^* یک مینیمم موضعی مسئله ای مقید باشد آنگاه: $x^* = \bar{x} + Zv^*$ که v^* نیز مینیمم تابع ϕ است. بنابراین $\nabla\phi(v^*) = 0$, $\nabla^2\phi(v^*)$ نیمه معین مثبت است. فرض کنیم x^* ،مینیمم موضعی باشد آنگاه $f(x^*) \le f(x)$ ، $\exists N_\bullet(x^*), \forall x \in N_\bullet(x^*)$ هم چنین داریم: $x^* = \bar{x} + Zv^*, x = \bar{x} + zv$ پس

$$
\begin{aligned}
&x - x^* = Z(v - v^*) \\
&z^T(x - x^*) = Z^T Z(v - v^*) \\
&v - v^* = (Z^T Z)^{-1} z^T (x - x^*) \\
&\left\|v - v^*\right\| \le \left\|(Z^T Z)^{-1} Z\right\| \left\|x - x^*\right\| \le M
\end{aligned}
$$

حال چون $f(x^*) \le f(x)$ در همسایگی داده شده و اینکه $f(x^*) = \phi(v^*), f(x) = \phi(v)$ پس $\phi(v) \le \phi(x)$ در یک همسایگی از v^* است بنابراین v^* ، مینیمم موضعی تابع ϕ است.

لم 1: مسئله زیر را در نظر بگیرید $(NL1) \begin{cases} \min f(x) \\ Ax = b \end{cases}$. شرط لازم برای اینکه x^* مینیمم موضعی مسئله $(NL1)$ باشد این است که $\begin{cases} Z^T \nabla f(x^*) = 0 \\ Z^T \nabla^2 f(x^*) Z \succ 0 \end{cases}$ که در آن Z یک پایه برای فضای پوچ ماتریس A است.

شرط دوم لم بالا معادل است با $\forall v, v^T Z^T \nabla^2 f(x^*) Zv \ge 0$. اگر قرار دهیم $p = Zv$ پس داریم: $\forall p \in N(A), p^T \nabla^2 f(x^*) p \ge 0$ یعنی ماتریس هسیان در نقطه x^* بایستی در فضای پوچ نیمه معین مثبت باشد. مشابه اثبات لم شرط لازم، می توان شرایط کافی نیز ارائه داد که در صورت برقراری آنها در یک نقطه، آن نقطه مینیمم موضعی است.

لم 2(شرایط کافی برای مسائل بهینه سازی غیر خطی مقید با قیود خطی تساوی):

اگر مسئله $(NL1)$ در شرایط $\begin{cases} Ax^{*}=b \\ Z^{T}\nabla f(x^{*})=0 \\ Z^{T}\nabla^{2} f(x^{*})Z \succ 0 \end{cases}$ که Z یک پایه برای فضای پوچ ماتریس A است. آنگاه x^{*} یک مینیمم موضعی اکید منحصر بفرد مسئله $(NL1)$ است.